试卷代号：1080

伯仲教育 2020 秋 工程数学（本） 试题

2021 年 1 月

微信：Wj585858-

一、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 A，B 均为 n 阶方阵，则下列命题中正确的是(　　).

A. 若 AB=0，则 A=0 或 B=0　　B. 若 AB=I，则 A=I 或 B=I

C. |AB|=|A||B|　　D. AB=BA

2. 设 A 与[A⋮B]分别代表非齐次线性方程组 AX=B 的系数矩阵和增广矩阵，若这个方程组有解，则(　　).

A. r(A)=r([A⋮B])　　B. r(A)<r([A⋮B])

C. r(A)>r([A⋮B])　　D. r(A)=r([A⋮B])-1

3. 矩阵 A=$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$的特征值为(　　).

A. -1,2　　B. -1,4

C1. -1　　D. 1,4

4. 掷两颗均匀的骰子，事件“点数之和为 5”的概率是(　　).

A. $\frac{1}{36}$　　B. $\frac{1}{18}$

C. $\frac{1}{12}$　　D. $\frac{1}{9}$

5. 设 x_1，x_2，…，x_n 是来自正态总体 N（ μ， σ^2）(p，口 2 均未知）的样本，则(　　)是统计量.

A. $\bar{x}+\mu$　　B. μx_1

C. x_1　　D. $\frac{x_1-\mu}{\sigma}$

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6. 设 A，B 均为 3 阶矩阵，且|A|=-1，|B|=2，则|-A′B'|= ________.

7. 设线性方程组 AX=0 中有 5 个未知量，且秩(A)=2，则 AX=0 的基础解系中线性无关的解向量有____个.

8. 若 P(A)=0.4，P(B)=0.3，且事件 A，B 相互独立，则 P(A+B)=_________.

9. 设随机变量 X～B(20，0.4)，则 E(X)=____________.

10. 如果参数θ的估计量$\hat{\theta}$满足 E（$\hat{\theta}$）=θ，则称$\hat{\theta}$为θ的________。

三、计算题（每小题 16 分，共 64 分）

11. 设矩阵 A=$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$，B=$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$，已知 AX=B，求 X.

12. 求齐次线性方程组$\begin{cases} x_1-x_2-3x_3-x_4=0 \\ 2x_1-x_2-x_3+4x_4=0 \\ x_1-4x_3+5x_4=0 \end{cases}$的一个基础解系和通解.

13. 设 X～N(20,2^2)，试求：(1)P(22<X<26)；(2)P(X>24).

(已知Φ (1)=0.8413, Φ(2)=0.9772, Φ(3)=0.9987)

14. 设某一批零件重量 X 服从正态分布 N（μ，0.6^2），随机抽取 9 个测得平均重量为 5（单位：千克），试求此零件重量总体均值的置信度为 0.95 的置信区间(已知 $u_{0.975}$=1.96).

四、证明题（本题 6 分）

15. 对任意方阵 A，试证A+A′ 是对称矩阵.

试卷代号：1080

伯仲教育 2020 年秋

工程数学（本）试题答案及评分标准

（供参考）

2021 年 1 月

一、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1.C　　2.A　　3. B　　4.D　　5.C

二、填空题（每小题 3 分，共 1o 分）

6.$\frac{1}{2}$

7.3

8.0.8

9.8

10.无偏估计量

三、计算题（每小题 16 分，共 64 分）

11.解：利用初等行变换可得

$$[A\quad I]=\begin{bmatrix}1&2&2&1&0&0\\-1&-1&0&0&1&0\\1&3&5&0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&2&1&0&0\\0&1&2&1&1&0\\0&1&3&-1&0&1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&2&2&1&0&0\\0&1&2&1&1&0\\0&0&1&-2&-1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&0&5&2&-2\\0&1&0&5&3&-2\\0&0&1&-2&-1&1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&0&-5&-4&2\\0&1&2&5&3&-2\\0&0&1&-2&-1&1\end{bmatrix}$$

因此，$A^{-1}=\begin{bmatrix}5&-4&2\\5&3&-2\\-2&-1&1\end{bmatrix}$　（10 分）

于是由矩阵乘法可得

$$X=A^{-1}B=\begin{bmatrix}-5&-4&2\\5&3&-2\\-2&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2\\1&1\\4&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&6\\0&-7\\1&3\end{bmatrix}$$（16 分）

12 解：将齐次线性方程组的系数矩阵化为阶梯形

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&3&-1\\2&-1&-1&4\\1&0&-4&5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&3&-1\\0&1&-7&6\\0&1&-7&6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&3&-1\\0&1&-7&6\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&-4&5\\0&1&-7&6\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

方程组的一般解为$\begin{cases}x_1=4x_3-5x_4\\x_2=7x_3-6x_4\end{cases}$(其中$x_3$，$x_4$是自由未知量)　　（7 分）

令$x_3=1$，$x_4=0$ 得相应的解向量为

$X_1=[4\quad 7\quad 1\quad 0]'$　　（10 分）

令$x_3=0$，$x_4=1$ 得相应的解向量为

$X_1=[-5\quad -6\quad 0\quad 1]'$

于是. (X_1,X_2)即为方程组的一个基础解系.　（13 分）

方程组的通解为$k_1X_1+k_2X_2$：(其中k_1，k_2为任意常数）.（16 分）

13.解（1）$P(22<X<26)=P\left(\frac{22-20}{2}<\frac{X-20}{2}<\frac{26-20}{2}\right)=P\left(1<\frac{X-20}{2}<3\right)$

$=\Phi(3)-\Phi(1)=0.9987-0.8413=0.1574.$

（2）$P(X>24)=1-P(X\le 24)=1-P\left(\frac{X-20}{2}\le\frac{24-20}{2}\right)=1-P\left(\frac{X-20}{2}\le 2\right)$

$=1-\Phi(2)=1-0.9772=0.0228.$

伯仲教育

14 解：由于已知σ^2，战选取样本函数

$U=\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$　　（5 分）

零件重量总体均值的置信度为 0.95 的置信区间为

$[\bar{x}-u_{0.975}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}，\bar{x}+u_{0.975}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$.　　（10 分）

由已知$\bar{x}=5$，$\sigma=0.6$，$n=9$,$u_{0.975}=1.96$，于是可得

$\bar{x}-u_{0.975}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=5-1.96\frac{0.6}{\sqrt{9}}=4.6088.$

$\bar{x}+u_{0.975}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=5+1.96\frac{0.6}{\sqrt{9}}=5.392$ •

因此，零件重量总体均值的置信度为 0.95 的置信区间为[4.608,5.392].（16 分）

四、证明题（本题 6 分）

15 证明：由已知条件和对称矩阵的性质

$$(A+A')'=A'+(A')'=A'+A=A+A'$$

所以 $A+A'$是对称矩阵　　（6 分）

试卷代号： 1080

伯仲教育 2021 年春 工程数学（本） 试题

2021 年 7 月

一、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1.设方阵A可逆，则下列命题中不正确的是(　　).

A. $A\neq 0$　　B.线性方程组$AX=O$必有非零解

C. $|A|\neq O$　　D.矩阵A'可逆

2.若向量组a_1，a_2，…a_n线性相关，则向量组内(　　)可被该向量组内其余向量线性表出.

A.任何一个向量　　B.没有一个向量

C.至多一个向量　　D.至少有一个向量

3.设A，B均为n阶方阵，则下列结论正确的是(　　).

A.若λ既是A，又是B的特征值，则必是$A+B$的特征值

B.若λ既是A，又是B的特征值，则必是AB的特征值

C.若x既是A，又是B的特征向量，则必是$A+B$的特征向量

D. A的特征向量的线性组合仍为A的特征向量

4.设袋中有 3 个红球，2 个白球，现从中随机抽取 2 个球，则 2 个球恰好不同色的概率是(　　).

A. $\frac{3}{5}$　　B. $\frac{2}{5}$

C. $\frac{4}{5}$　　D. $\frac{7}{10}$

5.对单正态总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，σ^2已知时，关于均值弘的假设检验应采用(　　).

A. F检验法　　B. t检验法

C. U检验法　　D. x^2检验法

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6.设A为 3× 5 矩阵，B为 4×3 矩阵，且乘AC'B有意义，则 C 为______________矩阵.

7.当$\lambda=$__________时，非齐次线性方程组$\begin{cases}x_1+\lambda x_2=1\\3x_1-6x_2=3\end{cases}$有无穷多解.

8.设A，B是两个随机事件，若$P(A)=0.7$，$P(A\bar{B})=0.3$，则$P(AB)=$______________.

伯仲教育

9. 设随机变量$X \sim N(2, 4^2)$，则随机变量$Y =$ ____________ $\sim N(0, 1)$.

10. 设随机变量X，若$E(X) = 4$，则$E(2X - 1) =$ ______________________

三、计算题（每小题 16 分，共 64 分）

11. 解矩阵方程$AX - X = B$，其中 $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$，$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

12. 当A取何值时，齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + \lambda x_3 = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解？在有非零解的情况下求方程组的通解.

13. 设$X \sim N(3, 2^2)$，试求：(1)$P(X < 5)$；(2)$P(X > 9)$.
(已知$\Phi(1) = 0.8413$，$\Phi(2) = 0.9772$，$\Phi(3) = 0.9987$)

14. 为了对完成某项工作所需时间建立一个标准，工厂随机抽查了 16 名工人分别去完成这项工作，结果发现他们所需的平均时间为 15 分钟，样本标准差为 3 分钟，假设完成这项工作所需的时间服从正态分布，在标准差不变的情况下，试确定完成此项工作所需平均时间的置信度为 0.95 的置信区间（已知$u_{0.975} = 1.96$）.

四、证明题（本题 6 分）

15. 设随机事件A与B相互独立，试证A与B也相互独立.

试卷代号：1080

伯仲教育 2 0 2 1 年春 工程数学（本） 试题

答案及评分标准

（供参考）

2021 年 7 月

一、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1.B　2.D　3.C　4.A　5.C

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6. 4×5

7. -2

8. 0.4

9. $\frac{X-2}{4}$

10. 7

三、计算题（每小题 16 分，共 64 分）

11. 解：由$AX - X = B$可得$(A - I)X = B$　（3 分）

由已知条件可得 $A - I = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$　（5 分）

利用初等行变换可得

$$[A - I \quad I] = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 5 & 8 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 15 & 25 & 5 & 0 \\ 15 & 24 & 0 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 15 & 25 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 15 & 0 & -120 & 75 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

伯仲教育

因此，$(A-I)^{-1}=\begin{bmatrix}-8 & 5\\ 5 & -3\end{bmatrix}$ （13 分）

于是由矩阵乘法可得

$X=(A-I)^{-1}B=\begin{bmatrix}-8 & 5\\ 5 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 4\\ -4 & -2\end{bmatrix}$ （16 分）

12. 解：将齐次线性方程组的系数矩阵化为阶梯形

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 4 & 5 & \lambda\\ 3 & 7 & 2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -3 & \lambda-4\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & \lambda-7\end{bmatrix}$$

故当$\lambda=7$时，方程组有非零解. （7 分）

方程组的一般解为$\begin{cases}x_1=-2x_3\\ x_2=x_3\end{cases}$（其中$x_3$是自由未知量） （10 分）

令$x_3=1$，得方程组的一个基础解系$X_1=[-3\ 1\ 1]'$ （13 分）

于是，方程组的通解为kx_1(其中k为任意常数). （16 分）

13. 解：(1) $P(x<5)=P\left(\frac{X-3}{2}<\frac{5-3}{2}\right)=P\left(\frac{X-3}{2}<1\right)$

$=\Phi(1)=0.8413.$ （8 分）

(2) $P(X>9)=1-P(X\le 9)=1-P\left(\frac{X-3}{2}\le\frac{9-3}{2}\right)=1-P\left(P\left(\frac{X-3}{2}\le 3\right)\right)$

$=1-\Phi(3)=1-0.9987=0.0013.$ （16 分）

14. 解：由于已知σ， 故选取样本函数

$U=\frac{\overline{x}-\mu}{\sigma\quad n}\sim N(O,1)$， （5 分）

完成此项工作所需平均时间的置信度为 0.95 的置信区间为

$[\overline{x}-u_{0.975}\frac{\sigma}{n},\ \overline{x}+u_{0.975}\frac{\sigma}{n}]$. （10 分）

由已知，$\overline{x}=15$，$\sigma=3$，$n=16$，$u_{0.975}=1.96$，于是可得

$\overline{x}-u_{0.975}\frac{\sigma}{n}=15-1.96\times\frac{3}{16}=13.53$，

$\overline{x}+u_{0.975}\frac{\sigma}{n}=15+1.96\times\frac{3}{16}=16.47$，

因此，完成此项工作所需平均时间的置信度为 0.95 的置信区间为[13.53，16.47].
（16 分）

四、证明题（本题 6 分）

15. 证明：因为$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=P(A)-P(A)P(B)=P(A)(1-P(B))$
$=P(A)P(B)$

所以，A 与 B 相互独立. （6 分）

试卷代号：1080

伯仲教育 2022 年春 工程数学（本）试题

2022 年 7 月

一、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

伯仲教育

1. 设 A，B 均为n阶方阵，则下列命题中正确的是(　　).

A. 若$AB = O$，则$A = O$或$B = O$　　B. 若$AB = I$，则$A = I$或$B = I$

C. $|AB| = |A||B|$　　D. $AB = BA$

2. 方程组$\begin{cases} x_1 - x_2 = a_1 \\ x_2 + x_3 = a_2 \\ x_1 + x_3 = a_3 \end{cases}$相容的充分必要条件是(　　)，其中$a_i \neq 0$，$i = 1，2，3$.

A. $a_1 + a_2 + a_3 = 0$　　B. $a_1 + a_2 - a_3 = 0$

C. $a_1 - a_2 + a_3 = 0$　　D. $- a_1 + a_2 + a_3 = 0$

3. 已知矩阵$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$的特征值为$-1,4$，则$A^{-1}$的特征值为(　　).

A. $-1，\frac{1}{4}$　　B. -1，4

C. 1,-4　　D. $1, -\frac{1}{4}$

4. 设袋中有 3 个红球，2 个白球，现从中随机抽取 2 个球，则 2 个球恰好不同色的概率(　　).

A. $\frac{3}{5}$　　B. $\frac{2}{5}$

C. $\frac{4}{5}$　　D. $\frac{7}{10}$

5. 设$X \sim N(1，2^2)$，则随机变量(　　)$\sim N(0，1)$.

A. $\frac{X+1}{2}$　　B. $\frac{X-1}{4}$

C. $\frac{X+1}{4}$　　D. $\frac{X-1}{2}$

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6. 若 3 阶方阵$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$，则$|A^2 + A| =$_____

7. 当λ=________时，非齐次线性方程组$\begin{cases} x_1 + \lambda x_2 = 1 \\ 3x_1 - 6x_2 = 3 \end{cases}$有无穷多解.

8. 设A，B 是两个 随机事件，且$P(B) \neq 0$，则称$P(A|B)$ 为事件B 发生 的条件 下，事件A 发生　　的____________.

9. 设随机变量$X \sim B(20，0.4)$，则$E(X) =$________________.

10. 如果参数θ的估计量$\hat{\theta}$满足_________，则称$\hat{\theta}$是参数θ的无偏估计量.

三、计算题（每小题 16 分，共 64 分）

11. 设矩阵$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$，$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，已知$XA = B$，求X.

12. 求齐次线性方程组$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 - 4x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$的通解.

13. 设$X \sim N(3，2^2)$，试求：(1)$P(X < 5)$；(2)$P(X > 9)$.

(已知$\Phi(1) = 0.8413$，$\Phi(2) = 0.9772, \Phi(3) = 0.9987$)

14. 某车间生产滚珠，已知滚珠直径服从正态分布，今从一批产品里随机取出 9 个，测得直径平均值为 15.1mm，若已知这批滚珠直径的方差为0.06^2，试找出滚珠直径均值的置信度为 0.95 的置信区间($u_{0.975} = 1.96$).

四、证明题（本题 6 分）

15. 设A为咒阶方阵，且满足$AA' = I$，$|A| = -1$，证明$|I + A| = 0$.

试卷代号：1080

伯仲教育 2022 年春 工程数学（本）　试题

答案及评分标准

（供参考）

2022 年 7 月

一、单项选择题(每小题 3 分，共 15 分）

1.C2.B3.A4.A5.D

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6.0

7.-2

8.条件概率

9.8

10.$E(\hat{\theta}) = 0$

三、计算题（每小题 16 分，共 64 分）

11.解：利用初等行变换可得

$$[A \vdots I] = \begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 0 & 1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & -2\\ 0 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

因此$A^{-1} = \begin{bmatrix}3 & -2\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ （10 分）

于是由矩阵乘法可得

$X = BA^{-1} = \begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -2\\ -1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5 & -4\\ 8 & -5\\ 3 & -2\end{bmatrix}$ （16 分）

注：用伴随矩阵法求A^{-1}正确也可得分.

12.解：将齐次线性方程组的系数矩阵化为阶梯形

$A = \begin{bmatrix}1 & -1 & 3 & -1\\ 2 & -1 & -1 & 4\\ 1 & 0 & -4 & 5\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & -1 & 3 & -1\\ 0 & 1 & 7 & 6\\ 0 & 1 & -7 & 56\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & -1 & 3 & -1\\ 0 & 1 & -7 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 0 & -4 & 5\\ 0 & 1 & -7 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

方程组的一般解为$\begin{cases}x_1 = 4x_3 \quad 5x_4\\ x_2 = 7x_3 - 6x_4\end{cases}$,其中$x_3, x_4$是自由未知数.（7 分）

令CCC得相应的解向量为

$X_1 = [4 \quad 7 \quad 1 \quad 0]'$ （10 分）

令$x_3 = 0, x_4 = 1$ 得相应的解向量为

$X_2 = [-5 \quad -6 \quad 0 \quad 01]'$

于是.$\{X_1, X_2\}$即为方程组的一个基础解系. （13 分）

方程组的通解为$k_1X_1 + k_2X_2$（其中k_1，k_2为任意常数）.（16 分）

13.解：(1)$P(X < 5) = P\left(\frac{X-3}{2} < \frac{5-3}{2}\right) = P\left(\frac{X-3}{2} < 1\right)$

$= \Phi(1) = 0.8413.$（8 分）

(2)$P(X > 9) = 1 - P(X \le 9) = 1 - P\left(\frac{X-3}{2} < \frac{9-3}{2}\right) = 1 - P\left(\frac{X-3}{2} < 3\right)$

$= 1 - \Phi(3) = 1 - 0.9987 = 0.0013.$（16 分）

14.解：由于已知σ^2，故选取样本函数

$$U = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / n} \sim N(0,1) \qquad (5 分)$$

滚珠直径均值的置信度为 0.95 的置信区间为

$$\left[x^- - u_{0.975}\frac{\sigma}{n}, x^- + u_{0.975}\frac{\sigma}{n}\right]$$

由已知.$x^- = 15.1, \sigma = 0.06. n = 9. u_{0.975} = 1.96.$ 于是可得

伯仲教育

$$\bar{x}-u_{0.975}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=15.1-1.96\times\frac{0.06}{\sqrt{9}}=15.0608$$

$$\bar{x}+u_{0.975}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=15.1+1.96\times\frac{0.06}{\sqrt{9}}=15.1392$$

因此，滚珠直径均值的置信度为 0.95 的置信区间为：[15.0608, 15.1392].（16 分）

四、证明题（本题 6 分）

15.证明：因为

$$|I+A|=|AA'+A|=|A(A'+I)|=|A||A'+I|=|A||I+A|=-|I+A|$$

所以$|I+A|=0$.（6 分）

伯仲教育